

1306 - Dinâmica rotacional



Roteiro elaborado com base na documentação que acompanha o conjunto por:
Otávio A.T. Dias IFT-SP & Elias da Silva – PUC-SP

Tópicos Relacionados

Momento de inércia, torque, momento angular, precessão, nutação.

Aviso

Este item é acompanhado da interface de aquisição de dados COBRA3 e do software licenciado “Measure®”.

Os recursos adicionais que esses elementos propiciam podem ser consultados no Handbook 2 – Cobra3 e na documentação eletrônica que acompanha o software.

Princípios e objetivos

O momento de inércia do giroscópio é investigado medindo-se a aceleração angular causada por torques de diferentes valores conhecidos. Neste experimento, dois dos eixos do giroscópio são fixados.

A relação entre a frequência de precessão e a giro-frequência do giroscópio com 3 eixos livres é examinada para torques de diferentes valores aplicados ao eixo de rotação.

Se o eixo de rotação do giroscópio de torque nulo for ligeiramente deslocado, uma nutação é induzida. A frequência de nutação será investigada como uma função da giro-frequência.

Equipamentos

Handbook Science Cobra3, part 2	01301.02	1
Base barril -PASS-	02006.55	1
Giroscópio com 3 eixos motor não neces.	02555.00	1
Giro-disco adicional com contra-peso	02556.00	1
Cabo de conexão, 32A, 75 cm, vermelho	07362.01	1
Cabo de conexão, 32A, 75 cm, amarelo	07362.02	1
Cabo de conexão, 32A, 75 cm, azul	07362.04	1
BARREIRA DE LUZ – foto-elétrica	11207.20	1
INTERFACE Cobra3	12150.00	1
Fonte de alimentação	12151.98	1
Software	14512.61	1
Cabo de dados PC COBRA RS232, 2m	14602.00	1

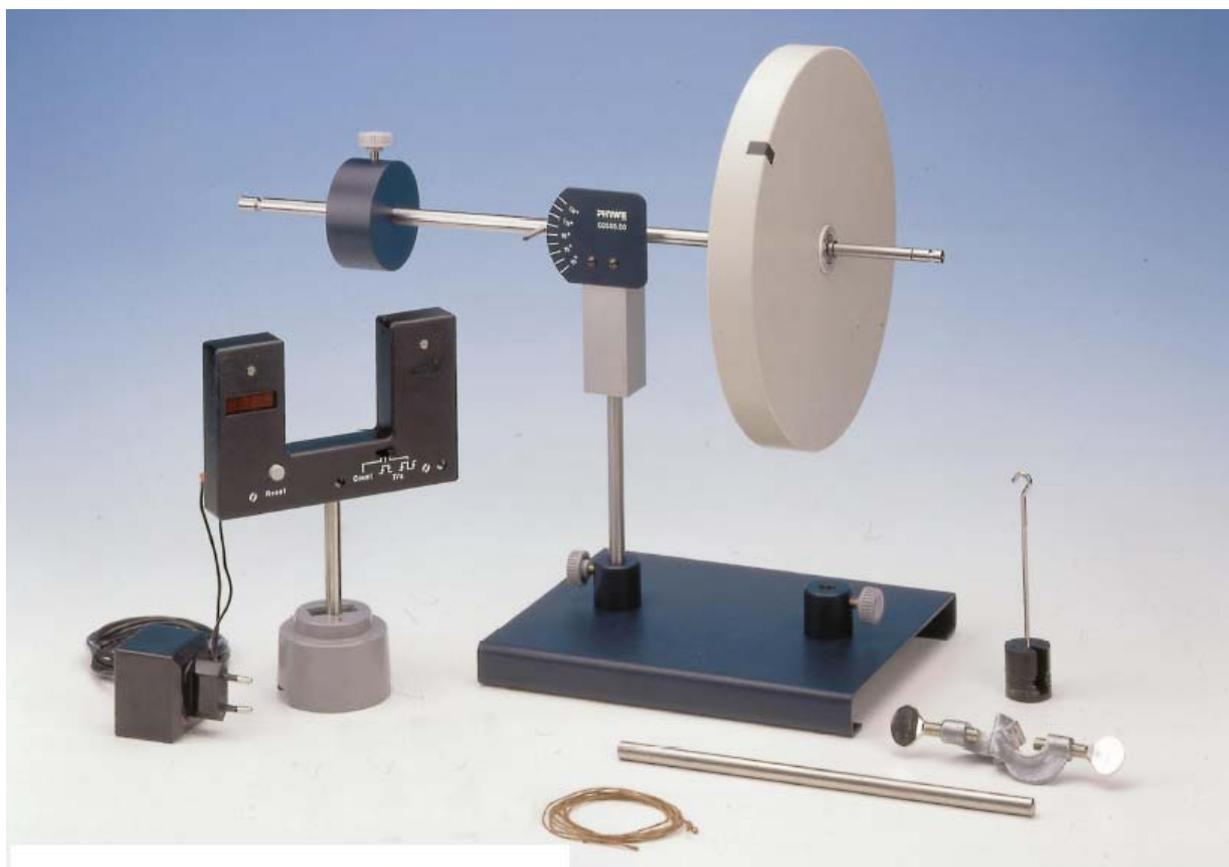


Fig.1 : Giroscópio de 3 eixos e a interface COBRA3 de aquisição de dados.

Problemas

1. Determinação do momento de inércia do giroscópio através de medidas da aceleração angular.
2. Determinação do momento de inércia através de medidas de giro-freqüência e freqüência de precessão.
3. Investigação da relação entre precessão e giro-freqüência e sua dependência do torque.
4. Investigação da relação entre freqüência de nutação e giro-freqüência.

1306 - Dinâmica rotacional

Montagem e procedimentos

1. O momento angular polar de inércia I_p do disco giroscópico deve ser determinado.

Para tanto, o giroscópio é afixado com seu eixo direcionado horizontalmente e posicionado na bancada de experimentos de tal maneira que o fio do tambor fique para fora da mesa (fig. 2). O fio é enrolado ao redor do tambor e a massa acelerada m ($m = 60$ g; prato com 5 pesos encaixados) é presa à ponta solta do fio.

Diversos experimentos são feitos para diferentes alturas de queda h da massa acelerada, dos quais o tempo de queda médio correspondente t_F do momento que o disco do giroscópio é solto até que a massa toque o chão é determinado.

O diagrama de t_F^2 por h é traçado e o momento de inércia do disco do giroscópio é determinado à partir da inclinação da linha reta.

2. O giroscópio, sob torque nulo, que pode mover-se livremente nos 3 eixos, é girado e a duração t_R de uma revolução (frequência de rotação) é determinada utilizando-se um *photogate*, com o eixo do giroscópio na posição horizontal. Imediatamente após isso, uma massa $m^* = 50$ g é pendurada a uma distância $r^* = 27$ cm na fenda na ponta mais longa do eixo do giroscópio. A duração de meia volta da precessação $t_p/2$ deve agora ser determinada com um cronômetro manual (este valor deve ser multiplicado por 2 para avaliação). A massa é então removida, de modo que o eixo do giroscópio possa retornar à imobilidade, e t_R possa ser novamente determinada. O inverso do valor médio de ambas as medidas de t_R é colocado em um diagrama sobre o tempo de precessação t_p . Da mesma forma, os outros pontos de medidas são registrados para um número decrescente de rotações do giroscópio. A inclinação da linha reta resultante permite o cálculo do momento de inércia do disco do giroscópio.

3. Se um leve sopro lateral é dado contra o eixo do giroscópio girando com torque nulo, o giroscópio começa a descrever um movimento de nutação. A duração de uma nutação t_N é determinada com o cronômetro manual e é plotada contra a duração de uma revolução, que é novamente determinada pelo *photogate*.

Teoria e Análise

1. Determinação do momento de inércia do disco do giroscópio.

1306 - Dinâmica rotacional

Se o disco do girsocópio é colocado para rodar por meio de uma massa em queda m (fig. 2), a seguinte relação é válida para a aceleração angular,

$$\frac{d\omega_R}{dt} = \alpha = \frac{M}{I_P} \quad (1)$$

onde

ω_R = velocidade angular;

α = aceleração angular;

I_P = momento de inércia polar;

$M = F \cdot r =$ torque.

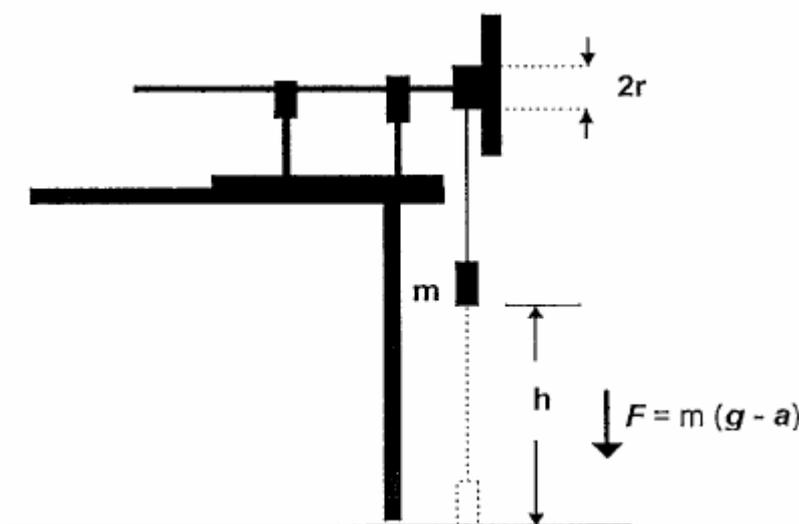


Fig.2: Representação esquemática da montagem experimental para determinação do momento de inércia do do disco do girsocópio.

De acordo com a lei da ação e reação, a força que causa o torque é dada pela relação

$$F = m \cdot (g - a) \quad (2)$$

onde g é a aceleração da gravidade e a é a aceleração da trajetória.

As seguintes relações são válidas para a aceleração da trajetória a e para a aceleração angular α ,

$$a = \frac{2h}{t_F^2}; \quad \alpha = \frac{a}{r}, \quad (3)$$

1306 - Dinâmica rotacional

sendo h a altura de queda da massa acelerada, t_F o tempo de queda e r o raio do tambor em que o fio está enrolado.

Substituindo (2) e (3) em (1), obtém-se:

$$t_F^2 = \frac{2l_P + 2mr^2}{mgr^2} \cdot h. \quad (4)$$

À partir da inclinação da linha reta $t_F^2 = f(h)$ da fig. 3, obtém-se os seguintes valores para o momento de inércia para o disco do girsocópio:

$$l_P = (8,83 \pm 0,15) \cdot 10^{-13} \text{ m}^2 \text{ kg}.$$

Em geral, pode-se utilizar a expressão seguinte para o momento de inércia de um disco,

$$l_P = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{\pi}{2} R^4 d\rho \quad (5)$$

Tomando os valores correspondentes para o raio R e a densidade d do disco circular, e o peso específico do plástico $\rho = 0,9 \text{ g/cm}^3$, obtém-se, usando (4),

$$l_P = 8,91 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ kg}.$$

2. Determinação da frequência de precessão

Deixe que o giroscópio simétrico G da fig. 4, que está suspenso de modo a poder rodar em torno dos 3 eixos principais, fique em equilíbrio na posição horizontal com o contrapeso C . Se o giroscópio estiver configurado para rodar em torno do eixo x , com uma velocidade angular ω , pode-se usar o resultado acima para o cálculo do momento angular L , que é uma constante no espaço e no tempo.

1306 - Dinâmica rotacional

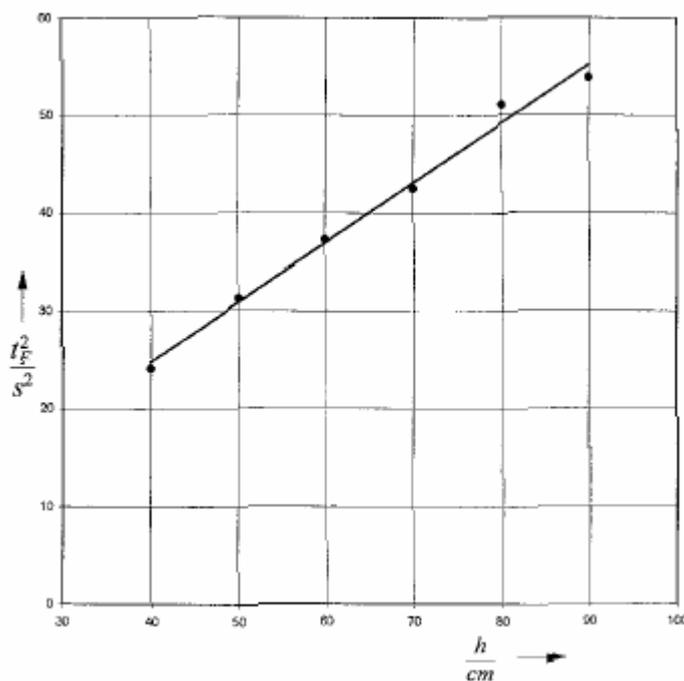


Fig.3 : Determinação do momento de inércia através da inclinação da reta $t_F^2 = f(h)$.

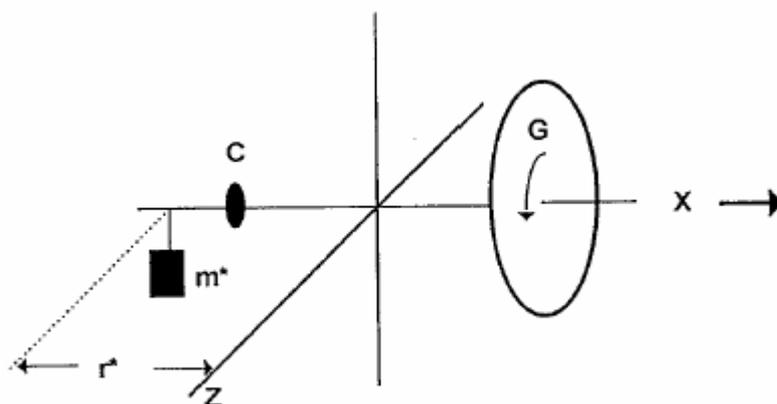


Fig.4: Representação esquemática do giroscópio submetido a forças.

$$L = I_P \cdot \omega_R. \quad (6)$$

Adicionar uma massa suplementar m^* numa distância r^* do ponto de suporte induz um torque suplementar M^* , que é paralelo e igual à variação temporal do impulso angular,

$$M^* = m^* \cdot g \cdot r^* = \frac{dL}{dt}. \quad (7)$$

1306 - Dinâmica rotacional

Devido à influência do torque suplementar (que age perpendicularmente neste caso particular), após um tempo dt , o momento angular L rodará um ângulo $d\varphi$ de sua posição inicial (fig. 5),

$$dL = Ld\varphi. \quad (8)$$

O giroscópio não tomba sob a influência do torque suplementar, mas reage perpendicularmente à força gerada por este torque. O giroscópio, que agora é submetido à gravitação, descreve o movimento de precessão.

A velocidade angular ω_P da precessão satisfaz a relação

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{l_P \omega_R} \frac{dL}{dt} = \frac{m^* \cdot g \cdot r^*}{l_P \omega_R}. \quad (9)$$

Usando $\omega_P = 2\pi/t_P$ e $\omega_R = 2\pi/t_R$ obtém-se

$$\frac{1}{t_R} = \frac{m^* \cdot g \cdot r^*}{4\pi r^2} \cdot \frac{1}{l_P} \cdot t_P. \quad (10)$$

De acordo com (10), fig. 6 mostra a relação linear entre o inverso da duração de uma revolução t_R do disco do giroscópio e a duração de uma revolução de precessão t_P para duas massas diferentes m^* . As inclinações das linhas retas permitem o cálculo dos valores dos momentos de inércia,

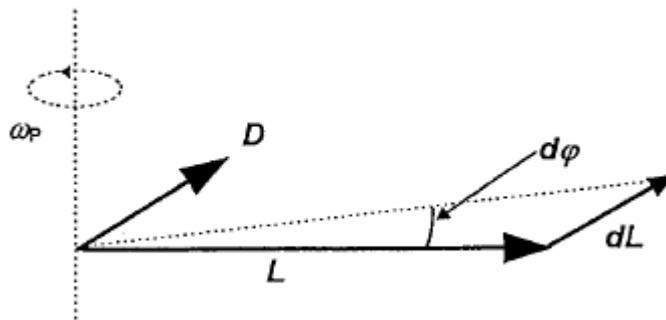


Fig.5: Precessão do eixo horizontal do giroscópio

$$l_P = (8,89 \pm 0,15)m^2 kg, \text{ para } m^* = 0,03 \text{ kg};$$

$$l_P = (9,29 \pm 0,17)m^2 kg, \text{ para } m^* = 0,06 \text{ kg}.$$

O valor dobrado do torque (valor duplo de m^*) faz com que a frequência de precessão dobre.

1306 - Dinâmica rotacional

Se m^* for pendurada na fenda frontal do eixo do giroscópio, ou se a direção de rotação do disco for invertida, a direção de rotação da precessão também é invertida.

Se o disco suplementar idêntico ao do giroscópio for usado também, e ambos forem colocados para rodar em direções opostas, nenhuma precessão ocorrerá quando o torque for aplicado.

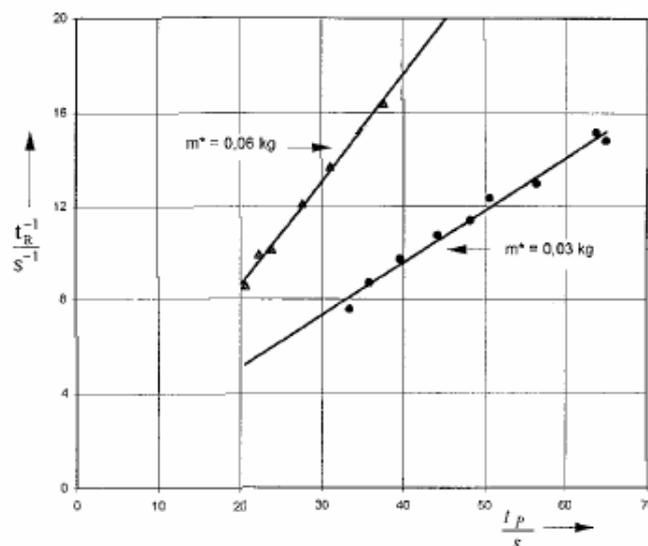


Fig.6: Determinação do momento de inércia através da inclinação da reta $t_R^{-1} = f(t_p)$.

3. Determinação da frequência de nutação

A fig. 7 apresenta a relação

$$\omega_N = k\omega_R \quad \text{e} \quad t_R = kt_N \quad (11)$$

entre a frequência de nutação ω_N e a frequência de rotação ω_R . A constante k depende dos diversos momentos de inércia relativos ao principal eixo de rotação.

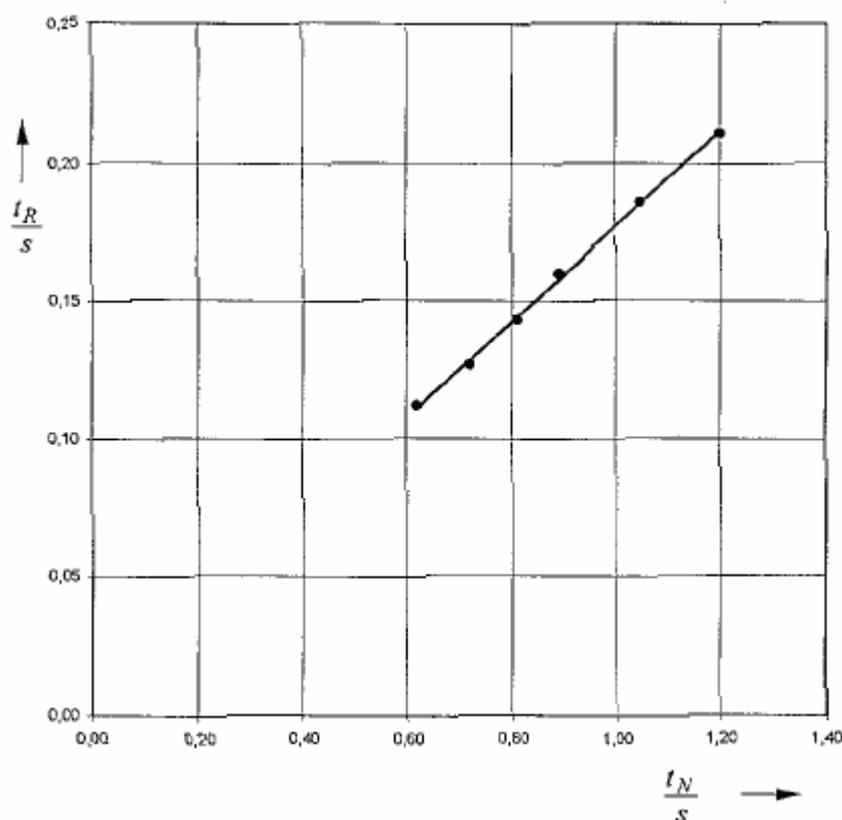
1306 - Dinâmica rotacional

Fig.7: tempo de nutação t_N em função do tempo para uma revolução t_R .

Nota sobre o uso do software Measure™

Após a instalação do software, abra o programa e no menu *Gauge* selecione “translation/rotation”. Nesse modo de operação os parâmetros para medição das variáveis periódicas são habilitados diretamente.

Para comparar, alguns exemplos são fornecidos no Guia de Uso da interface COBRA3 nos experimentos de translação/rotação (e.g. pêndulo, momento de inércia).